

文章编号:1672-9331(2021)03-0097-08

# 考虑自重影响和屈曲约束的结构拓扑优化方法

李方义<sup>1,2</sup>, 卢志宏<sup>1</sup>, 易继军<sup>1</sup>, 荣见华<sup>1</sup>, 周 泉<sup>3</sup>

(1. 长沙理工大学 汽车与机械工程学院, 湖南 长沙 410114; 2. 长沙理工大学 桥梁工程安全控制教育部重点实验室, 湖南 长沙 410114; 3. 中国建筑工程集团第五工程局有限公司, 湖南 长沙 410004)

**摘要:** 为综合解决考虑自重影响和屈曲约束的结构拓扑优化问题, 提出一种新的拓扑优化设计方法。首先, 针对优化过程中低密度区域的伪屈曲模态问题和自重引起的寄生效应问题, 同时为了减少计算量, 提出了改进的材料惩罚模型, 并引入伪屈曲模态的识别和删除措施。其次, 为克服常规应力单元的应力刚性问题, 采用混合应力单元对结构应力进行了精确评估。基于密度过滤及 Heaviside 三场映射方案, 建立了目标函数为考虑自重影响的结构柔顺度最小、满足屈曲和体积主动约束的拓扑优化模型。利用伴随变量法对屈曲约束的灵敏度进行了推导, 并采用移动渐近线 (method of moving asymptotes, MMA) 算法对模型进行了优化求解。最后, 通过算例说明了本研究方法的正确性和可行性。

**关键词:** 拓扑优化; 屈曲约束; 自重; 伪屈曲模态; 材料惩罚模型; MMA 算法

**中图分类号:** TH122 **文献标志码:** A

## A structural topology optimization method considering self-weight influences and buckling constraints

LI Fang-yi<sup>1,2</sup>, LU Zhi-hong<sup>1</sup>, YI Ji-jun<sup>1</sup>, RONG Jian-hua<sup>1</sup>, ZHOU Quan<sup>3</sup>

(1. School of Automobile and Mechanical Engineering, Changsha University of Science & Technology, Changsha 410114, China; 2. Key Laboratory of Bridge Engineering Safety Control of Ministry of Education, Changsha University of Science & Technology, Changsha 410114, China; 3. China Construction Fifth Engineering Division Corp., Ltd., Changsha 410004, China)

**Abstract:** In order to comprehensively solve the structural topology optimization problem considering the self-weight influences and buckling constraints, a new topology optimization design method was proposed. First, for the problems of pseudo-buckling modes and parasitic effects caused by self-weight of low-density areas during the optimization process, and aiming to reduce the calculation, an improved material penalty model was proposed, and measures for identifying and deleting pseudo-buckling modes were introduced. Then, in order to overcome the stress stiffening problem of the conventional stress elements, the mixed stress element was used to accurately evaluate the structural stress. Based on the density filtering and Heaviside three-field mapping scheme, a topology optimization model satisfying buckling constraints and volume active constraints was established, whose object func-

收稿日期:2021-04-12

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11772070);湖南省自然科学基金资助项目(2019JJ40296);长沙理工大学桥梁工程安全控制教育部重点实验室开放基金资助项目(19KB06);长沙理工大学青年教师成长计划项目(2019QJCZ032);中国建筑第五工程局有限公司科研项目(3030402)

通讯作者:李方义(1978-),男,副教授,主要从事结构优化方面的研究。E-mail:lfy703@sina.com

tion was that the structural compliance considering self-weight influences was minimal. The adjoint variable method was used to derive the sensitivity of the buckling constraints, and the method of moving asymptotes(MMA) algorithm was adopted to optimize the model. Finally, examples were given to illustrate the correctness and feasibility of the method proposed in this study.

**Key words:** topology optimization; buckling constraint; self-weight; pseudo-buckling mode; material penalty model; MMA algorithm

当结构所受到的载荷超过某一临界值时,结构将出现屈曲失稳,相应的临界值被称为临界屈曲载荷<sup>[1]</sup>。在实际的工程设计中,自重是影响生产成本的重要因素之一,并在很大程度上影响着结构的稳定性。因此,在结构优化中不可忽视自重的影响。目前,尽管学者们在结构屈曲优化设计研究方面取得了许多成果<sup>[2]</sup>,但很少有文献同时考虑屈曲约束和结构自重对结构拓扑优化的影响。究其原因,一方面,在结构拓扑优化时自重作用会引起低密度单元的寄生效应<sup>[3]</sup>,导致优化结果的体积达不到约束上限;另一方面,常规的线性单元有限元分析存在应力解误差太大的问题,进而使得应力矩阵和屈曲载荷因子的计算不准确,同时也存在较难解决的重特征值和伪屈曲模态等问题。近年来,考虑屈曲的拓扑优化设计重新引起了人们的兴趣<sup>[4-6]</sup>。FERRARI等<sup>[4-5]</sup>提出了间隔因子,以避免多重特征值的出现,并克服了收敛困难等问题。GAO等<sup>[7-8]</sup>分别采用屈曲约束凝聚方案及伪屈曲模态识别和删除措施,来解决低阶屈曲载荷因子的交替变化问题和伪屈曲模态问题。但是,在用传统的固体各向同性材料惩罚模型(solid isotropic material with penalization, SIMP)求解结构屈曲模态时,大量低密度单元的聚集会导致存在很多低阶伪屈曲模态。若用伪屈曲模态识别和删除处理措施,则会极大地增加计算量。数值试验表明,某些迭代步需计算的屈曲模态数甚至达到了400以上,从而导致屈曲特征方程的求解量陡增。目前,尚没有能综合考虑自重影响和屈曲约束的结构拓扑优化问题的有效办法。

针对考虑自重影响和屈曲约束的结构拓扑优化中屈曲特征方程求解计算量大等问题,本研究提出一种新的考虑自重影响和屈曲约束的拓扑优化设计方法。首先,提出改进的惩罚模型,减少拓

扑优化迭代过程中需计算的低阶屈曲模态数(仅在少数迭代步出现少量伪屈曲模态)。为确保无伪屈曲模态,引入伪屈曲模态识别和删除措施。其次,基于混合应力单元公式、密度过滤和Heaviside三场映射方案,推导出自重作用下结构的柔顺度、屈曲约束的灵敏度。引入屈曲约束和两个主动体积不等式约束,形成一种新的考虑自重影响和屈曲约束的结构拓扑优化模型,并用移动渐近线(method of moving asymptotes, MMA)算法对其进行求解。最后,用几个算例验证了该模型的正确性。

## 1 材料惩罚模型

### 1.1 改进的材料惩罚模型

考虑自重载荷和屈曲约束的拓扑优化过程常存在3个问题:①低密度单元的聚集导致的伪屈曲模态;②自重引起的低密度区域的寄生效应;③优化结构体积的上限约束不能控制优化结果的体积比。

针对这些问题,许多学者进行了研究<sup>[9]</sup>。ZHU等<sup>[10]</sup>提出了光滑多项式惩罚模型,以规避低阶伪模态。为减少优化结构的低阶伪屈曲模态的个数,避免由低密度单元自重引起的寄生效应,借鉴上述增大低密度单元刚度的思路,构建单元刚度矩阵。应力刚度矩阵与单元密度合理匹配的光滑惩罚模型为:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_e &= [(1-h)\bar{x}_{e,p} + h\bar{x}_{e,q}] \mathbf{k}_{e,0} \\ \mathbf{k}_{\sigma,e} &= \bar{x}_{e,p} \mathbf{k}_{\sigma,e,0} \\ \rho_e &= \bar{x}_{e,\rho} \end{aligned} \quad (1)$$

式中: $\bar{x}_e$ 为结构第 $e$ 号单元的物理变量, $\bar{x}_{\min} \leq \bar{x}_e \leq 1$ ,其下限 $\bar{x}_{\min} = 10^{-6}$ ;  $h$ 为刚度惩罚多项式函数的参数,本研究中 $h$ 取为 $1/16$ ;  $p, q$ 为惩罚

因子,通过数值仿真研究发现,当  $p=4, q=2$  时结构低阶伪屈曲模态较少,且对寄生效应的抑制效果较好;  $\mathbf{k}_{e,0}, \mathbf{k}_e$  分别为第  $e$  号单元的固有刚度矩阵和刚度矩阵;  $\mathbf{k}_{\sigma,e,0}$  和  $\mathbf{k}_{\sigma,e}$  分别为第  $e$  号单元的固有应力刚度矩阵和应力刚度矩阵;  $\rho_e$  为第  $e$  号单元的密度;  $\rho_0$  为基材密度。本研究采用文献[11]所用的密度过滤和 Heaviside 三场映射方案得到清晰的 0/1 拓扑。

## 1.2 考虑自重影响的屈曲约束

基于结构失稳的小位移梯度假设,考虑自重影响的屈曲特征值方程可表示为:

$$(\mathbf{K} + \lambda_i \mathbf{K}_\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{U})) \boldsymbol{\varphi}_i = 0 \quad (2)$$

式中:特征值  $\lambda_i$  为第  $i$  阶临界屈曲载荷  $\mathbf{F}_{cr,i}$  的放大因子,  $i \in [1, n]$ , 且  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ ;  $\boldsymbol{\varphi}_i$  为屈曲模态;  $\mathbf{K}$  为结构的整体弹性刚度矩阵;  $\mathbf{K}_\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{U})$  为结构的整体几何刚度矩阵,其中  $\mathbf{U}$  为结构位移向量。

结构所受载荷包括依赖密度的重力载荷和外载荷。载荷矢量  $\mathbf{F}$  可表示为:

$$\mathbf{F} = \mathbf{G} + \mathbf{P} \quad (3)$$

式中: $\mathbf{P}$  为施加在结构上的外载荷; $\mathbf{G}$  为结构重力载荷矢量,  $\mathbf{G} = [G_1, G_2, \dots, G_{2(\tau-1)+1}, G_{2\tau}, \dots, G_{2N_{\text{Node}}}]^T$ ,  $N_{\text{Node}}$  为节点总数。

将每个单元的重力载荷均分到单元的每个节点上,使得每个节点承载的等效重力载荷为与其相连的所有单元的重力分量之和,即:

$$\begin{cases} G_{2(\tau-1)+1} = 0 \\ G_{2\tau} = - \sum_{e \in \bar{N}_\tau} (\rho_e g v_e) / 4 \end{cases} \quad (4)$$

式中: $\bar{N}_\tau$  为与第  $\tau$  个节点相连的单元编号的集合;  $g$  为重力加速度;  $v_e$  为第  $e$  号单元的体积。

为确保 Lanczos 算法迭代的有效性<sup>[4]</sup>,令  $\mu_i$  为屈曲载荷因子的倒数,即  $\mu_i = 1/\lambda_i$ ,则式(2)可改写为:

$$(\mathbf{K}_\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{U}) + \mu_i \mathbf{K}) \boldsymbol{\varphi}_i = 0 \quad (5)$$

为提高结构在自重影响和外载荷作用下的抗屈曲能力,本研究在综合考虑计算结果、计算成本及前  $n_d$  阶真实屈曲模态对结构影响的基础上,建立屈曲约束的表达式为:

$$R_c \alpha M_{\text{KS}}(\bar{\boldsymbol{\mu}}) \leq 1 \quad (6)$$

式中: $R_c$  为规定的屈曲载荷因子的下限值;  $\bar{\boldsymbol{\mu}}$  是

为了解决重特征值而用间隔因子  $\chi$  进行变换后的特征值,变换式为  $\bar{\mu}_i = \chi_{1-i} \mu_i$ ,本研究中  $\chi$  取 1.01;  $\alpha$  为修正系数<sup>[4]</sup>,其更新表达式为  $\alpha = \frac{(\mu_1)^{k-1}}{(M_{\text{KS}}(\bar{\boldsymbol{\mu}}))^{k-1}}$ 。 $M_{\text{KS}}(\bar{\boldsymbol{\mu}})$  为屈曲载荷因子倒数的 KS(kreisselmeier-steihauser)凝聚函数,其表达式为:

$$M_{\text{KS}}(\bar{\boldsymbol{\mu}}) = \frac{1}{\eta} \ln \left( \sum_{i=1}^{n_d} e^{\eta \bar{\mu}_i} \right) \quad (7)$$

式中: $\eta$  为凝聚因子,根据参考文献[4],本研究中取  $\eta = 8, n_d = 8$ 。

## 1.3 伪屈曲模态的识别与删除

尽管使用式(1)所示的惩罚模型进行拓扑优化可大量减少低阶伪屈曲模态的个数,但仍不能完全避免低阶伪屈曲模态的产生。为进一步保证得到的屈曲模态为真实屈曲模态,提高优化的准确性,本研究采用基于局部应变能的伪屈曲模态识别准则来判定伪屈曲模态,即:

$$\begin{cases} r_{L,j} = \frac{(\boldsymbol{\varphi}_{L,j})^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_{L,j} + (\boldsymbol{\varphi}_{H,j})^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_{H,j}}{\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_j} = \frac{(\boldsymbol{\varphi}_{L,j})^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_j}{\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_j} \\ r_{L,j} > M_L \end{cases} \quad (8)$$

式中: $\boldsymbol{\varphi}_{L,j}, \boldsymbol{\varphi}_{H,j}$  的表达式见文献[7];  $M_L$  为经验值,本研究中取  $M_L = 0.3$ ;  $r_{L,j}$  为屈曲模态的应变能比,当  $r_{L,j} > M_L$  时,判定屈曲模态为伪屈曲模态,应予以删除。

## 2 优化模型

结构应力刚度矩阵的准确性依赖于单元应力的准确性。与常规线性位移单元相比,混合应力单元能够有效克服单元的应力刚化问题<sup>[12]</sup>,其应力分析结果较准确。本研究采用 PIAN 等<sup>[12]</sup>提出的混合应力单元进行有限元分析,获得准确的单元应力,从而可在屈曲分析中计算出准确的模态振型。

BRUYNEEL 等<sup>[9]</sup>研究发现,用规定体积为上限构成的体积不等式约束代替式(9)所示的等式约束后,自重拓扑优化后的实际体积可能不是指定的体积,这意味着规定体积不能达到其上限,即为非主动体积约束。为了满足体积等式约束的要

求,本研究用两个主动体积不等式约束代替式(9)的等式约束。

$$\sum_{e=1}^N \bar{x}_e v_{e,0} = V_f \quad (9)$$

式中:  $V_f$  为优化目标体积。

综上所述,考虑自重影响和屈曲约束的结构拓扑优化模型可表达为:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} \mathbf{C} = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \\ \text{s. t. } \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{G} + \mathbf{P} \\ f(\mathbf{x}) = R_c \alpha M_{\text{KS}}(\bar{\boldsymbol{\mu}}) - 1 \leq 0 \\ g_1(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^N \bar{x}_e(\mathbf{x}) v_{e,0} / V_0 - V_f / V_0 \leq 0 \\ g_2(\mathbf{x}) = - \sum_{e=1}^N \bar{x}_e(\mathbf{x}) v_{e,0} / V_0 + (1 - \theta) V_f / V_0 \leq 0 \\ 0 < x_{\min} \leq x_e \leq 1, e = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (10)$$

式中:  $\theta$  为体积下界的松弛参数,在本研究中取  $\theta = 0.004$ ;  $V_0$  为设计域充满材料时的结构体积。

### 3 灵敏度分析

根据链式求导法则,任意函数  $f(\mathbf{x})$  对设计变量  $x_e$  的导数可表示为:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_e} = \sum_{l \in N_e} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \bar{x}_l} \frac{\partial \bar{x}_l}{\partial \tilde{x}_l} \frac{\partial \tilde{x}_l}{\partial x_e} \quad (11)$$

式中:  $x_e$  为第  $e$  号单元的设计变量;  $\tilde{x}_l$  为第  $l$  号单元密度过滤后的物理变量;  $\partial \bar{x}_l / \partial \tilde{x}_l$ ,  $\partial \tilde{x}_l / \partial x_e$  的意义可参见文献[11]。

#### 3.1 目标函数灵敏度分析

考虑自重和外载荷作用下的结构平衡关系式可表示为:

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{G} + \mathbf{P} \quad (12)$$

本研究默认外载荷  $\mathbf{P}$  与物理变量  $\bar{x}_e$  无关。由式(12)对物理变量  $\bar{x}_e$  求导,可得结构位移向量  $\mathbf{U}$  对物理变量  $\bar{x}_e$  的导数为:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \bar{x}_e} = \mathbf{K}^{-1} \left( \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \bar{x}_e} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \bar{x}_e} \mathbf{U} \right) \quad (13)$$

$$\mathbf{Q}_i = \left[ \bar{\boldsymbol{\varphi}}_i^T \frac{\partial \mathbf{K}_\sigma(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{U})}{\partial u_1} \bar{\boldsymbol{\varphi}}_i \quad \bar{\boldsymbol{\varphi}}_i^T \frac{\partial \mathbf{K}_\sigma(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{U})}{\partial u_2} \bar{\boldsymbol{\varphi}}_i \quad \dots \quad \bar{\boldsymbol{\varphi}}_i^T \frac{\partial \mathbf{K}_\sigma(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{U})}{\partial u_{N_{\text{Dof}}}} \bar{\boldsymbol{\varphi}}_i \right]^T \quad (19)$$

将式(13)和式(18)代入式(17),即可将式

本研究默认重力的方向为  $y$  轴负方向。由式(4)对物理变量  $\bar{x}_e$  求导,可得节点上的等效重力载荷对物理变量  $\bar{x}_e$  的导数为:

$$\begin{cases} \frac{\partial G_{2(\omega-1)+1}}{\partial \bar{x}_e} = 0, & \omega = 1, 2, \dots, N_{\text{Node}} \\ \left\{ \frac{\partial G_{2\gamma}}{\partial \bar{x}_e} = -(\rho_0 g v_e), & \gamma \in \tilde{N}_e \right. \\ \left. \frac{\partial G_{2\gamma}}{\partial \bar{x}_e} = 0, & \gamma \notin \tilde{N}_e \right. \end{cases} \quad (14)$$

式中:  $\tilde{N}_e$  为第  $e$  号单元节点的全局编号的集合。

由本研究采用的式(1)所示的惩罚模型,可得到单元刚度矩阵  $\mathbf{k}_e$  对物理变量  $\bar{x}_e$  的导数为:

$$\frac{\partial \mathbf{k}_e}{\partial \bar{x}_e} = [(1-h) p \bar{x}_e^{(p-1)} + h q \bar{x}_e^{(q-1)}] \mathbf{k}_{e,0} \quad (15)$$

式(10)所示的优化模型的目标函数对物理变量  $\bar{x}_e$  的导数为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \bar{x}_e} = & \mathbf{U}_e^T \frac{\partial \mathbf{G}_e}{\partial \bar{x}_e} - \frac{1}{2} [(1-h) p \bar{x}_e^{(p-1)} + \\ & h q \bar{x}_e^{(q-1)}] \mathbf{U}_e^T \mathbf{k}_{e,0} \mathbf{U}_e \end{aligned} \quad (16)$$

式中:  $\mathbf{U}_e$  为第  $e$  号单元的位移矢量;  $\mathbf{G}_e$  为第  $e$  号单元的重力载荷矢量。

#### 3.2 屈曲约束的灵敏度分析

基于文献[4-7],式(5)中的特征值  $\mu_i$  对物理变量  $\bar{x}_e$  的导数为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_i}{\partial \bar{x}_e} = & -\bar{\boldsymbol{\varphi}}_i^T \left[ \frac{\partial \mathbf{K}_\sigma(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{U})}{\partial \bar{x}_e} + \mu_i \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \bar{x}_e} + \right. \\ & \left. \sum_{j=1}^{N_{\text{Dof}}} \left( \frac{\partial \mathbf{K}_\sigma(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{U})}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial \bar{x}_e} \right) \right] \bar{\boldsymbol{\varphi}}_i \end{aligned} \quad (17)$$

式中:  $\bar{\boldsymbol{\varphi}}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n_d$ ) 为归一化后的第  $i$  阶屈曲模态矢量;  $u_j$  为自重和外载荷共同作用下第  $j$  号自由度上的位移;  $N_{\text{Dof}}$  为结构的总自由度数。

引入伴随向量  $\boldsymbol{\delta}_i$ , 其满足如下关系:

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\delta}_i = \mathbf{Q}_i, i = 1, 2, \dots, n_d \quad (18)$$

式中:

(17)简化为:

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial \bar{x}_e} = -\bar{\boldsymbol{\varphi}}_i^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}_e(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{U})}{\partial \bar{x}_e} \right) + \mu_i \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \bar{x}_e} \bar{\boldsymbol{\varphi}}_i + \boldsymbol{\delta}_i^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \bar{x}_e} \mathbf{U} - \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \bar{x}_e} \right) \quad (20)$$

因此,式(10)中的屈曲约束  $f(x)$  对物理变量  $\bar{x}_e$  的导数为:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \bar{x}_e} = \frac{R_c \alpha}{\sum_{i=1}^{n_d} e^{\eta \bar{\mu}_i}} \left\{ \boldsymbol{\delta}^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \bar{x}_e} \mathbf{U} - \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \bar{x}_e} \right) - \sum_{i=1}^{n_d} \left[ \chi^{1-i} e^{\eta \bar{\mu}_i} \bar{\boldsymbol{\varphi}}_i^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}_e(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{U})}{\partial \bar{x}_e} \right) + \mu_i \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \bar{x}_e} \bar{\boldsymbol{\varphi}}_i \right] \right\} \quad (21)$$

其中,  $\boldsymbol{\delta}$  可由下式获得:

$$\begin{cases} \mathbf{K} \boldsymbol{\delta} = \bar{\mathbf{Q}} \\ \bar{\mathbf{Q}} = \sum_{i=1}^{n_d} (\chi^{1-i} e^{\eta \bar{\mu}_i} \mathbf{Q}_i) \end{cases} \quad (22)$$

对式(22)中屈曲载荷因子中的伴随向量进行合并,可减少屈曲约束灵敏度的计算量。采用 MMA 算法<sup>[13]</sup>,并结合上述灵敏度的分析,对考虑自重影响和屈曲约束的结构拓扑优化问题进行求解。当结构的灰度值和设计变量最大更新值分别小于 0.01 和 0.001 时,可判定优化过程是收敛的,此时终止迭代<sup>[11]</sup>。优化求解流程如图 1 所示。

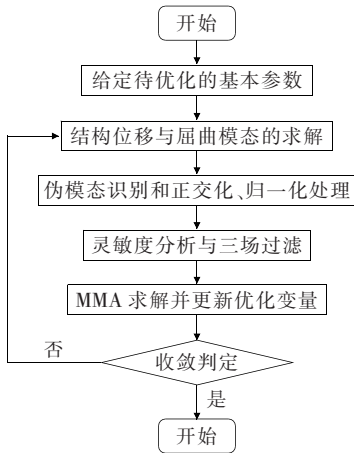


图 1 优化求解流程图

Fig. 1 Flow chart of optimization solution

## 4 算例分析

统一设定本研究中所有算例的材料属性为:材料杨氏模量  $E_0=200$  GPa,基材密度  $\rho_0=7\ 850$  kg/m<sup>3</sup>。其他参数设定为:泊松比  $\nu=0.3$ ,重力加速度  $g=9.8$  m/s<sup>2</sup>,优化目标体积与设计域充满材料时的体积之比  $V_f/V_{(0)}=0.2$ ,密度过滤半径  $r=1.5\Delta$ ,其中  $\Delta$  为最大单元边长。

### 4.1 两杆桁架屈曲拓扑优化

图 2 所示为 0.90 m×2.10 m 两杆桁架的初

始设计域,其厚度为 0.002 m。在图 2 中,  $a, b$  两点关于水平中心线对称,  $a$  到上边线的距离和  $b$  到下边线的距离均为 0.15 m。结构位移的固定约束设置在  $a, b$  两点上,右侧中点  $c$  处受到竖直向下的载荷  $P=3.2 \times 10^5$  N 的作用。图中灰色正方形区域为非设计域,其中左侧两个非设计域的尺寸均为 0.09 m×0.09 m,右侧非设计域的尺寸为 0.08 m×0.08 m。

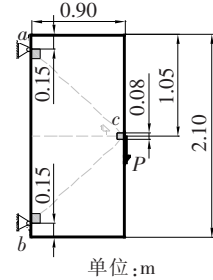


图 2 两杆桁架的初始设计域

Fig. 2 Initial design domain of two-bar truss

图 3 所示为由本研究方法得到的无屈曲约束时的优化拓扑构型,其柔顺度为 24.9 N·m,临界阶屈曲载荷因子为 42。当忽略自重影响时,得到的优化拓扑构型的柔顺度为 23.1 N·m,临界阶屈曲载荷因子为 45。与考虑自重影响时相比,优化拓扑构型的柔顺度和临界阶屈曲载荷因子都存在偏差,且当结构自重与外载荷大小相近时,偏差更加明显,从而影响优化的准确性。

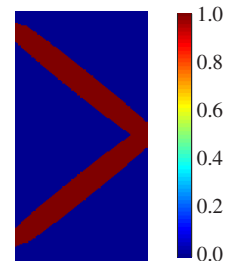


图 3 无屈曲约束时的优化拓扑构型

Fig. 3 Optimal topology configuration without buckling constraints



为证明本研究方法的可行性,对不同屈曲载荷因子约束下的优化结果进行对比分析。将屈曲

载荷因子的下限值  $R_c$  分别设置为 70, 80, 90, 100, 对应的优化拓扑构型分别见图 4(a)~4(d)。

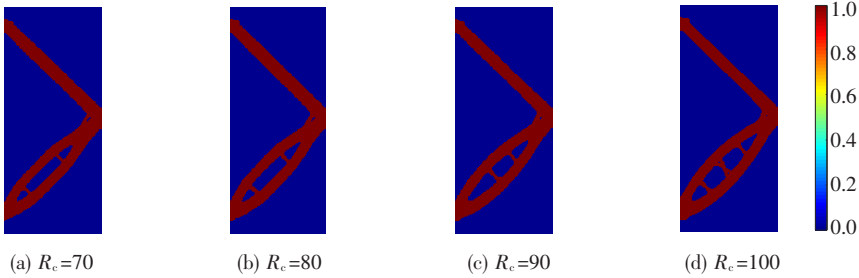


图 4 不同下限值时的优化拓扑构型

Fig. 4 Optimal topology configurations with different lower limit values

优化结果显示,无论是否施加屈曲约束,由自重引起的寄生效应及体积都得到了很好的控制。图 4(a)~4(d)所示的优化构型的柔顺度分别为 26.2, 26.7, 27.4, 26.8  $\text{N} \cdot \text{m}$ , 其对应的临界屈曲载荷因子分别为 80.8, 81.1, 90.1, 100.2。由此可以看出,结构临界屈曲载荷因子随屈曲载荷因子下限值的增大而增大,但柔顺度变化不大。此外,随着屈曲载荷因子下限值的增大,优化拓扑构型膨胀得越来越大,结构内细小的连接杆的数量也有所增多,这些连接杆的出现有利于结构抗屈曲性能的提高。与文献[4-5]相比,本研究方法获得的优化拓扑构型在可制造性上更具有优势。

图 5~6 所示分别为不同屈曲载荷因子下限值对应的柔顺度和临界屈曲载荷因子的优化历程。从图 6 可以看出,曲线出现跳跃,这主要是因为 Heaviside 三场映射方案中的曲率参数每 50 步便翻倍,导致 Heaviside 三场映射方案对密度的惩罚加剧,从而使结构拓扑的变化过大。优化过程中的数据显示,在优化迭代中本算例仅需求解 15

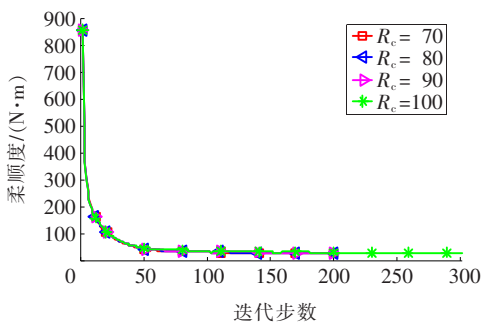


图 5 不同下限值时柔顺度的优化历程

Fig. 5 Compliance optimization process with different lower limit values

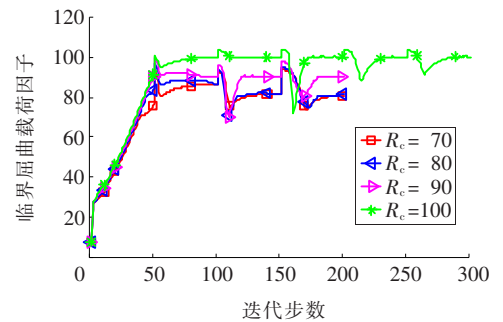


图 6 不同下限值时临界屈曲载荷因子的优化历程

Fig. 6 Optimization process of critical buckling load factors with different lower limit values

个模式即可获得前 8 阶真实屈曲的模式,因而大大减少了屈曲模式的求解数量,节省了计算成本。

#### 4.2 夹紧梁屈曲拓扑优化

图 7 所示为  $2.0 \text{ m} \times 0.5 \text{ m}$  夹紧梁的初始设计域,其厚度为  $0.001 \text{ m}$ 。该夹紧梁上边线的中点受到竖直向下的载荷  $P = 7.5 \times 10^3 \text{ N}$  的作用。

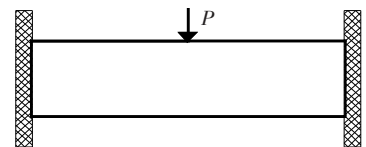


图 7 夹紧梁的初始设计域

Fig. 7 Initial design domain of clamped beam

图 8 所示为由本研究方法得到的无屈曲约束时的优化拓扑构型,其柔顺度为  $5.7 \text{ N} \cdot \text{m}$ , 临界阶屈曲载荷因子为 39.4。将屈曲载荷因子的下限值  $R_c$  分别设置为 150, 170, 200, 对应的优化拓扑构型分别见图 9(a)~9(c)。

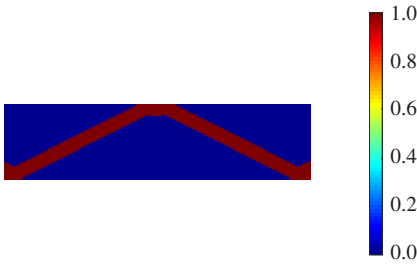


图 8 无屈曲约束时的优化拓扑构型

Fig. 8 Optimal topology configuration without buckling constraints

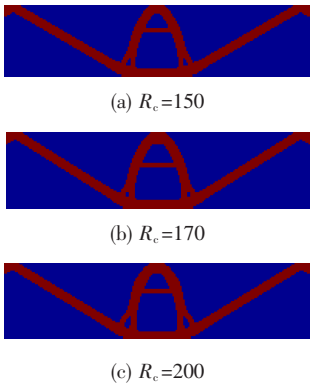


图 9 不同下限值时的优化拓扑构型

Fig. 9 Optimal topology configurations with different lower limit values

图 10 所示为  $R_c = 200$  的优化拓扑构型对应的临界屈曲模态变形图。图 11~12 所示为不同屈曲载荷因子下限值对应的柔顺度和临界屈曲载荷因子的优化历程。



图 10 临界屈曲模态变形图

Fig. 10 Deformation diagram of critical buckling mode

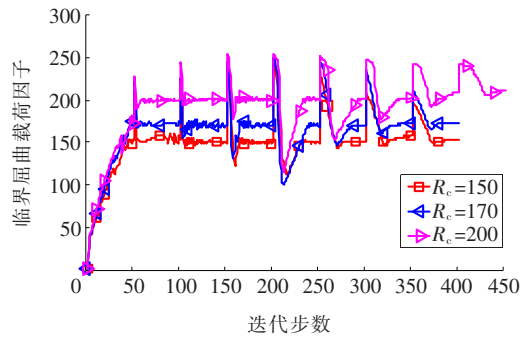


图 12 不同下限值时临界屈曲载荷因子的优化历程

Fig. 12 Optimization process of critical buckling load factors with different lower limit values

表 1 列出了相应于图 9(a)~9(c)所示的优化拓扑构型的柔顺度及临界屈曲载荷因子。优化结果表明:本研究方法对自重引起的寄生效应具有较好的抑制效果,且满足体积要求,在引入屈曲约束后临界屈曲载荷也有所增大。

表 1 不同下限值时的柔顺度及临界屈曲载荷因子

Table 1 Compliance and critical buckling load factors with different lower limit values

$R_c$	柔顺度/ (N · m)	临界屈曲 载荷因子	临界屈曲载荷的 增大比率/%
150	6.9	153.3	289.1
170	7.2	171.6	335.5
200	7.3	211.3	436.3

### 5 结论

本研究基于密度过滤和 Heaviside 三场映射方案构建了考虑自重影响和屈曲约束的结构拓扑优化模型。首先,采用改进的材料惩罚模型并结合伪屈曲模态识别和删除措施来规避优化过程中的伪屈曲模态和寄生效应。利用混合应力单元准确地计算了单元应力,避免了常规应力单元的应力刚化问题。然后,基于伴随变量法对屈曲约束的灵敏度进行推导,利用 MMA 算法对上述优化问题进行求解。最后,通过数值算例的分析得到了以下结论:

1) 本研究提出的材料惩罚模型和伪屈曲模态处理措施能够有效减少伪屈曲模态的数量,并能很好地抑制结构自重引起的寄生效应。

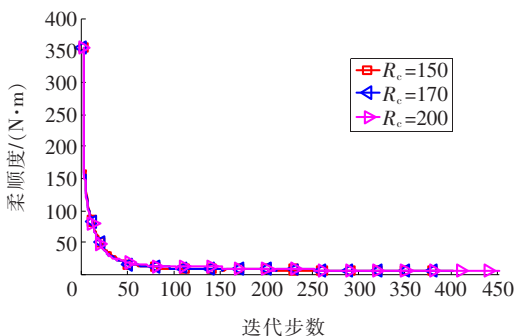


图 11 不同下限值时柔顺度的优化历程

Fig. 11 Compliance optimization process with different lower limit values

2) 通过密度过滤、Heaviside 三场映射方案和主动体积不等式约束,本研究方法能够获得清晰的 0/1 拓扑构型,且对结构体积具有很好的控制效果。

3) 结构临界屈曲载荷因子随屈曲载荷因子下限值的增大而增大,但柔顺度变化不大。优化后结构的临界屈曲载荷有所增大,即结构的稳定性得到了提高。

### 〔参考文献〕

- [1] 韩庆华,金辉,艾军,等. 工程结构整体屈曲的临界荷载分析[J]. 天津大学学报,2005(12):1 051-1 057.  
HAN Qing-hua, JIN Hui, AI Jun, et al. Analysis of critical load for overall buckling of engineering structures[J]. Journal of Tianjin University, 2005(12): 1 051-1 057.
- [2] ZHU B L, ZHANG X M, ZHANG H C, et al. Design of compliant mechanisms using continuum topology optimization: a review[J]. Mechanism and Machine Theory, 2020, 143: 103622.
- [3] PEDERSEN N L. Maximization of eigenvalues using topology optimization[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2000, 20(1): 2-11.
- [4] FERRARI F, SIGMUND O. Revisiting topology optimization with buckling constraints[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2019, 59(5): 1 401-1 415.
- [5] FERRARI F, SIGMUND O. Towards solving large-scale topology optimization problems with buckling constraints at the cost of linear analyses[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2020, 363(1): 589-618.
- [6] BRUYNEEL M, COLSON B, REMOUCHAMPS A. Discussion on some convergence problems in buckling optimisation[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2008, 35(2): 181-186.
- [7] GAO X J, MA H T. Topology optimization of continuum structures under buckling constraints[J]. Computers and Structures, 2015, 157(2): 142-152.
- [8] GAO X J, LI Y X, MA H T, et al. Improving the overall performance of continuum structures: a topology optimization model considering stiffness, strength and stability[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2020, 359(S): 325-348.
- [9] BRUYNEEL M, DUYSINX P. Note on topology optimization of continuum structures including self-weight[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2005, 29(4): 245-256.
- [10] ZHU J, ZHANG W, BECKERS P. Integrated layout design of multi-component system[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2009, 78(6): 631-651.
- [11] 荣见华,彭罗,易继军,等. 一种新的多输入多输出柔顺机构拓扑优化方法[J]. 长沙理工大学学报(自然科学版), 2021, 18(1): 66-78.  
RONG Jian-hua, PENG Luo, YI Ji-jun, et al. A new topology optimization method for multi-input-multi-output compliant mechanisms[J]. Journal of Changsha University of Science & Technology (Natural Science), 2021, 18(1): 66-78.
- [12] PIAN T H, SUMIHARA K. Rational approach for assumed stress finite elements[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1984, 20(9): 1 685-1 695.
- [13] SVANBERG K. A class of globally convergent optimization methods based on conservative convex separable approximations[J]. Society for Industrial and Applied Mathematics Journal on Optimization, 2002, 12(2): 555-573.